



TITLE:

On Aluthge transformation and weakly unitarily invariant norm (Role of Operator Inequalities in Operator Theory)

AUTHOR(S):

大久保, 和義

CITATION:

大久保, 和義. On Aluthge transformation and weakly unitarily invariant norm (Role of Operator Inequalities in Operator Theory). 数理解析研究所講究録 2005, 1427: 76-83

ISSUE DATE:

2005-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/47315>

RIGHT:

On Aluthge transformation and weakly unitarily invariant norm

北海道教育大学札幌校 大久保 和義

1. はじめに

\mathcal{H} をヒルベルト空間, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を \mathcal{H} 上の有界線形作用素全体の集合とする. $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とし, $T = VP$ を T の polar decomposition とする. (ただし, P : positive semi-definite, V : partial isometry satisfying $V^*VP = P$ とする.)

$0 \leq \lambda \leq 1$ に対して T の λ -Aluthge transformation を $P^\lambda VP^{1-\lambda}$ で定義する. 特に, $\lambda = \frac{1}{2}$ のときには, Aluthge transformation とよばれる ([A] 参照). $|||\cdot|||$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の weakly unitarily invariant norm, すなわち,

$$|||VXV^*||| = |||X||| \quad (V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \text{unitary}, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$$

が成り立つとする. T が invertible のとき, unitarily invariant norm $|||\cdot|||$ に関して $g(\lambda) \equiv |||P^\lambda VP^{1-\lambda}|||$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) とすると, $g(\lambda)$ は convex で $g(0) = g(1)$ である. また, 特に $\dim \mathcal{H} = 2$ のときは, $g(\lambda) = g(1-\lambda)$ がいえて, $\min_{0 \leq \lambda \leq 1} g(\lambda) = g(\frac{1}{2})$ となるが, $\dim \mathcal{H} \geq 3$ のときは, $g(\lambda)$ の最小値は, $g(\frac{1}{2})$ になるとは限らない. その例と

して, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ を考える. すると, $f(a) = P^a VP^{1-a} = \begin{pmatrix} 1/3 \cdot 3^{1/2} & 1/3 \cdot 3^{1/2} \cdot 2^{1-a} & 1/3 \cdot 3^{1/2} \cdot 3^{1-a} \\ 1/2 \cdot 2^a \cdot 2^{1/2} & -1/2 \cdot 2^a \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{1-a} & 0 \\ 1/6 \cdot 3^a \cdot 6^{1/2} & 1/6 \cdot 3^a \cdot 6^{1/2} \cdot 2^{1-a} & -1/3 \cdot 3^a \cdot 6^{1/2} \cdot 3^{1-a} \end{pmatrix}$ となり, $g(a) = ||f(a)||$ ($0 \leq a \leq 1$) とすると $g(1/2) = 2.798077044$, $g(2/5) = 2.795949312$ となることが計算できる.

$\rho > 0$ に対して $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ がある Hilbert space $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ と \mathcal{K} 上の unitary operator U があって,

$$T^n = \rho Q U^n|_{\mathcal{H}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たすとき, T を ρ -contraction とよぶ. ただし, Q は \mathcal{K} から \mathcal{H} への orthogonal projection である. ρ -contraction に対して, T の ρ -radius $w_\rho(T)$ が,

$$w_\rho(T) \equiv \inf \{ r > 0 : \frac{1}{r} T \text{ is a } \rho\text{-contraction} \}$$

で定義される ([H] 参照). $0 < \rho \leq 2$ に対して $w_\rho(\cdot)$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の weakly unitarily invariant norm となる.

この講演では, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対してその λ -Aluthge transformation と weakly unitarily invariant norm の間に成り立つ不等式について述べる.

2. T が invertible な場合の結果

定理 1 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が invertible で $T = VP$ を T の polar decomposition とし, $TB = BT$ とする. また, $|||\cdot|||$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の weakly invariant norm とするとき,

$$|||P^\lambda BVP^{1-\lambda}||| \leq |||BVP||| \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

がいえる。

証明

$$\varphi(z) \equiv P^{\frac{1}{2}-z} BVP^{\frac{1}{2}+z} \quad \left(-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\right)$$

とすると, $P^{\pm it}$, V, V^* は unitary であるから,

$$\varphi\left(\frac{1}{2} + it\right) = P^{-it} \cdot BVP \cdot P^{it}, \quad \|\varphi\left(\frac{1}{2} + it\right)\| = \|BVP\| \quad (-\infty < t < \infty)$$

となる。また, 可換性 $VPB = BVP$ を使って,

$$\varphi\left(-\frac{1}{2} + it\right) = P^{-it} \cdot PB \cdot VP^{it} = P^{-it} V^* \cdot VPB \cdot VP^{it} = P^{-it} V^* BVP \cdot VP^{it},$$

となることがわかり,

$$\|\varphi\left(-\frac{1}{2} + it\right)\| = \|BVP\|$$

がいえる。さらに

$$L\left(-\frac{1}{2}\right) = L\left(\frac{1}{2}\right) = \|BVP\|$$

となるから, 三線定理 ([G-K] 参照) より

$$\|P^\lambda BVP^{1-\lambda}\| \leq \|BVP\|$$

が示される。

特に多項式 $f(z)$ に対して $B \equiv f(VP)$ は可換性の条件を満たすから

$$\|P^\lambda f(VP)VP^{1-\lambda}\| \leq \|f(VP)VP\|.$$

がいえることになる。

このことを用いると次のことがいえる。

定理 2 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が invertible で $T = VP$ を T の polar decomposition とする。 f を任意の多項式として, $|||\cdot|||$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の weakly invariant norm とするとき,

$$|||f(P^\lambda VP^{1-\lambda})||| \leq |||f(VP)||| \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

となる。

証明 定理 1 で特に多項式 $f(z)$ に対して $B \equiv f(VP)$ は可換性の条件を満たすから

$$\|P^\lambda f(VP)VP^{1-\lambda}\| \leq \|f(VP)VP\|$$

がいえる。すなわち, $f(z)$ が多項式で $f(0) = 0$ なら, weakly unitarily invariant norm $|||\cdot|||$ にたいして

$$|||f(P^\lambda VP^{1-\lambda})||| \leq |||f(VP)||| \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

がいえ。一般の多項式 $f(z)$ に対して

$$f(z) = \alpha + g(z) \cdot z$$

と書こう。このとき、

$$f(VP) = \alpha + g(VP) \cdot VP = \{\alpha \cdot (VP)^{-1} + g(VP)\} \cdot VP$$

となる。そこで

$$B = \alpha \cdot (VP)^{-1} + g(VP)$$

とすると、 B は VP と可換であるので、定理 1 の結果より

$$|||P^\lambda BVP^{1-\lambda}||| \leq |||BVP||| = |||f(VP)|||$$

がいえ。一方で、

$$\begin{aligned} P^\lambda BVP^{1-\lambda} &= \alpha P^\lambda (VP)^{-1} VP \cdot P^{-\lambda} + P^\lambda g(VP) VP^{1-\lambda} \\ &= \alpha + P^\lambda g(VP) VP^{1-\lambda} = f(P^\lambda VP^{1-\lambda}) \end{aligned}$$

となるから、定理 2 が示される。

3. T が non-invertible な場合

次に、 T の invertibility を除いて考えよう。この場合、invertibility を仮定する場合と様相が異なる。また、以下の条件を満たす semi-norm を考える。

$|||\cdot|||$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の semi-norm が次の条件を満たすとする。

$$|||X||| \leq \gamma |||X|| \quad \exists \gamma \quad (X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})), \quad (1)$$

および

$$|||S^*XS||| \leq |||S|||^2 \cdot |||X||| \quad (X, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})) \quad (2)$$

さらに場合によっては、以下の条件も要求するときがある。

$$|||Q||| = 1 \quad \forall \text{ orthoprojection } Q \neq 0, \quad (3)$$

および

$$XQ = QX, \text{ orthoprojection } Q \implies |||X||| = \max \{ |||XQ|||, |||X(1-Q)||| \} \quad (4)$$

すなわち、 $X = A \oplus B$ ならば、

$$|||X||| = \max \left\{ |||\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}|||, |||\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}||| \right\}$$

が成り立つということである。

条件 (3) は, $|||\cdot|||$ が operator norm と equivalent, すなわち (1) の他に

$$\gamma' |||X||| \geq \|X\| \quad \exists \gamma' \quad (X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$$

であれば出るし, もっと自然には

$$r(X) \leq |||X||| \quad (x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$$

の条件から出る。

(1), (2), (3), (4) を満たす norm としては, operator norm $\|\cdot\|$, numerical radius $w(\cdot)$ およびそれを一般化した ρ -radius $w_\rho(\cdot)$ ($0 < \rho \leq 2$) などがある。

このとき, 次のことがいえる。

定理 3 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の polar decomposition を $T = VP$ とする。 $|||\cdot|||$ は条件 (1), (2) を満たす $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の semi-norm とする。このとき, $0 \leq \lambda \leq 1$ および任意の多項式 f に関して次の不等式が成り立つ:

$$|||f(P^\lambda V P^{1-\lambda})||| \leq \max \{ |||f(VP)|||, |||V^* \cdot f(VP) \cdot V + f(0)(I - V^*V)||| \}$$

証明

$$f(z) = f(0) + g(z)z$$

と書く。ここで $g(z)$ も多項式である。つぎに P_n ($n = 1, 2, \dots$) を以下で定義する。

$$\begin{aligned} P \text{ invertible} &\implies P_n \equiv P \\ P \text{ not invertible} &\implies P_n \equiv P + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

P_n は invertible positive definite で,

$$0 \leq P_n^\lambda - P^\lambda \leq \frac{1}{n^\lambda} \quad (n = 1, 2, \dots; 0 < \lambda \leq 1)$$

となる。したがって, 一様収束の意味で,

$$f(P^\lambda V P^{1-\lambda}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n^\lambda V P_n^{1-\lambda})$$

$$f(VP) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(VP_n)$$

となる。複素平面の帯状領域 $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}$ で, operator-valued analytic function $\varphi_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) を

$$\varphi_n(z) \equiv f(0) + P_n^{\frac{1}{2}-z} \cdot g(VP_n) \cdot V P_n^{\frac{1}{2}+z}$$

で定義する。境界 $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$ および $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ での norm を評価しよう:

$$\begin{aligned} \varphi_n\left(\frac{1}{2} + it\right) &= f(0) + P_n^{-it} \cdot g(VP_n) V P_n \cdot P_n^{it} \\ &= P_n^{-it} \cdot f(VP_n) \cdot P_n^{it} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\varphi_n(-\frac{1}{2} + it) &= f(0) + P_n^{-it} P_n \cdot g(VP_n) V \cdot P_n^{it} \\ &= P_n^{-it} \{f(0) + P_n \cdot g(VP_n) V\} P_n^{it}\end{aligned}$$

となる。ここで $P_n^{\pm it}$ は unitary だから

$$\begin{aligned}\sup_{t \in \mathbf{R}} |||\varphi_n(\frac{1}{2} + it)||| &\leq |||f(VP_n)||| \\ \sup_{t \in \mathbf{R}} |||\varphi_n(-\frac{1}{2} + it)||| &\leq |||f(0) + P_n \cdot g(VP_n) V|||.\end{aligned}$$

三線定理を使うと

$$\begin{aligned}|||f(P_n^\lambda U P_n^{1-\lambda})||| &= |||\varphi_n(\frac{1}{2} - \lambda)||| \\ &\leq \max\{|||f(VP_n)|||, |||f(0) + P_n \cdot g(VP_n) V|||\}\end{aligned}$$

がいえる。したがって limit を考えると

$$|||f(P^\lambda V P^{1-\lambda})||| \leq \max\{|||f(VP)|||, |||f(0) + P \cdot g(VP) V|||\}$$

となる。ところで $V^*VP = P$ より

$$\begin{aligned}f(0) + P \cdot g(VP) V &= V^* \{f(0) + VP \cdot g(VP)\} V + f(0)(I - V^*V) \\ &= V^* \cdot f(VP) \cdot V + f(0)(I - V^*V).\end{aligned}$$

より

$$|||f(0) + P \cdot g(VP) V||| = |||V^* \cdot f(VP) \cdot V + f(0)(I - V^*V)|||$$

となり、上と合わせると定理 3 が証明される。

系 4 $f, \lambda, T = VP$ に関しては定理 3 と同じ設定で、以下の (i), (ii), (iii) のどれかが満たされれば

$$|||f(P^\lambda V P^{1-\lambda})||| \leq |||f(VP)|||$$

が成り立つ。

- (i) $f(0) = 0$,
- (ii) V として isometry がとれる, すなわち $\dim(\ker(T)) \leq \dim(\ker(T^*))$,
- (iii) semi-norm $|||\cdot|||$ が (3), (4) を満たす。

証明 (i), (ii) の場合は

$$|||V^* \cdot f(VP) \cdot U + f(0)(I - V^*V)||| = |||U^* \cdot f(VP) \cdot V||| \leq |||f(VP)|||$$

となるから示される。

(iii) の場合は, (V が isometry でなければ)

$$\begin{aligned} |||V^* \cdot f(VP) \cdot V + f(0)(I - V^*V)||| &= \max \{ |||V^* \cdot f(VP) \cdot V|||, |f(0)| \} \\ &\leq \max \{ |||f(VP)|||, |f(0)| \} \end{aligned}$$

であるが,

$$|f(0)| \cdot |||I - V^*V||| = |||(I - V^*V) \cdot f(VP) \cdot (I - V^*V)||| \leq |||f(VP)|||$$

がいえるので, 上と合わせると

$$|||V^* \cdot f(VP) \cdot V + f(0)(I - V^*V)||| \leq |||f(VP)|||$$

がでるから, 結局定理 3 より

$$|||f(P^\lambda V P^{1-\lambda})||| \leq |||f(VP)|||$$

が示される。

系 5 $f, \lambda, T = VP$ に関しては定理 3 と同じ設定とする。このとき, $\rho > 0$ に対して次の不等式がいえる。

$$w_\rho(f(P^\lambda V P^{1-\lambda})) \leq w_\rho(f(VP))$$

特に $\rho = 1, 2$ として

$$\|f(P^\lambda V P^{1-\lambda})\| \leq \|f(VP)\|, \quad w(f(P^\lambda V P^{1-\lambda})) \leq w(f(VP))$$

証明 もし $0 < \rho \leq 2$ ならば, ρ -radius は (1), (2), (3), (4) を満たす norm なので, 系 4 (iii) を使えばよい。 $\rho > 2$ のとき, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して, $w_\rho(X) \leq 1$ なるための必要十分条件は $r(X) \leq 1$ で

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho-1)^k |z|^{k-1}}{\rho^k} X^k \right\| \leq \rho-1 \text{ for } |z| \leq 1$$

が成り立つことである ([A-O] 参照)。したがって, 系 5 を示すためには $w_\rho(f(T)) \leq 1$ が成り立つたとき, $w_\rho(f(P^\lambda U P^{1-\lambda})) \leq 1$ が成り立つことを示せばよい。 $w_\rho(f(T)) \leq 1$ とすると先のことから,

$$r(f(P^\lambda U P^{1-\lambda})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(f(P^\lambda V P^{1-\lambda}))^n\|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|(f(T))^n\|^{1/n} = r(f(T)) \leq 1$$

また, $\|\sum_{k=1}^N \frac{(\rho-1)^k |z|^{k-1}}{\rho^k} (f(P^\lambda V P^{1-\lambda}))^k\| \leq \|\sum_{k=1}^N \frac{(\rho-1)^k |z|^{k-1}}{\rho^k} (f(T))^k\|$ が $|z| \leq 1$ と任意の自然数 N についていえるから, limit を取ることによって,

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho-1)^k |z|^{k-1}}{\rho^k} (f(P^\lambda V P^{1-\lambda}))^k\| \leq \|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho-1)^k |z|^{k-1}}{\rho^k} (f(T))^k\| \leq \rho - 1$$

が $|z| \leq 1$ に対していえて, したがって, $w_\rho(f(P^\lambda V P^{1-\lambda})) \leq 1$ がいえる。

注意 系 5 の結果で $\lambda = \frac{1}{2}$ のときは [I-N-O-Y] で示されている。

$X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して X の数域 $W(X)$ が次で定義される:

$$W(X) := \{(Tx, x) \mid x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}$$

ここでは, λ -Aluthge transformation と $W(\cdot)$ に関する包含関係について示す。

系 6 $f(z)$, λ , V , P は定理 3 と同じ設定とする。このとき, 数域 $W(\cdot)$ に関して以下の包含関係が成り立つ。すなわち,

$$\overline{W(f(P^\lambda V P^{1-\lambda}))} \subset \overline{W(f(VP))}$$

証明 一般に operator A に関して, どの $1 \leq \rho \leq 2$ で

$$\overline{W(A)} = \bigcap_{\mu \in \mathbb{C}} \{z; |z - \mu| \leq w_\rho(A - z)\}$$

となることが知られている。系 5 で $f(z) - \mu$ を考えて,

$$w_\rho(f(P^\lambda V P^{1-\lambda}) - \mu) \leq w_\rho(f(VP) - \mu)$$

であるから, 求める包含関係は上の共通部分表示よりでる。

注意 系 6 に関して $\lambda = \frac{1}{2}$ のとき, $W(P^{1/2} V P^{1/2}) \subset W(VP)$ は [Y],[W] で示されている。また, 系 6 の $\lambda = \frac{1}{2}$ のときは [I-N-O-Y] で示されている。

参考文献

- [A] A. Aluthge: *On p -hyponormal operators for $0 < p < 1$* , Integral Equations Operator Theory, **13** (1990), pp. 307–315.
- [A-O] T. Ando and K. Okubo: *Hölder type inequalities associated with operator radii and Schur products*, Linear and Multilinear Algebra, **43** (1997), pp. 53–61.
- [G-K] I. C. Gohberg and M. G. Krëin: *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Translations of Mathematical Monographs, **18**, Amer. Math. Soc., 1969.

- [H] J. A .R. Holbrook: *On the power-bounded operators of Sz.-Nagy and Foiaş*, Acta. Scie. Math.(Szeged), **29** (1968), pp. 297–310.
- [I-N-O-Y] M. Ito, H. Nakazato, K. Okubo and T. Yamazaki: *On generalized numerical range of the Aluthge transformation*, Linear Algebra Appl. **370** (2003), pp. 147–161.
- [N-F] Sz.-Nagy and C. Foiaş: *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North-Holland Publishing Company, 1970
- [O] K. Okubo: *On weakly unitarily invarriant norm and the Aluthge transformation*, Linear Algebra Appl. **371** (2003), pp.369–375.
- [Y] T. Yamazaki: *On numerical range of the Aluthge transformation*, Linear Algebra Appl., **341** (2002), pp. 111–117.
- [W] P. Y. Wu: *Numerical range of Aluthge transform of operator*, Linear Algebra Appl., **357** (2002), pp. 295–298.